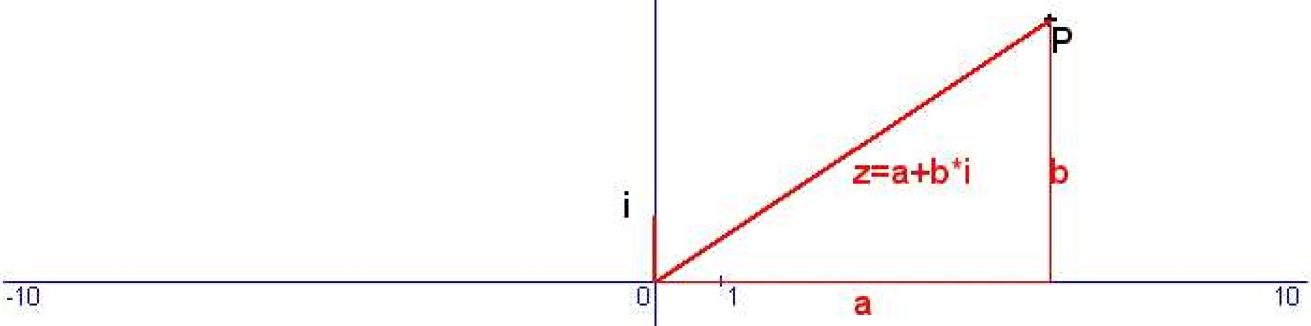
Komplexe Zahlen

Version 2.0 © Herbert Paukert

Hinweis:
Das vorliegende Skriptum besteht hauptsächlich aus Kopien aus dem interaktiven Lernprojekt ***paumath.exe***, das von der Homepage des Autors www.paukert.at heruntergeladen werden kann. Deswegen sind Texte und Grafiken teilweise nicht von höchster Qualität.

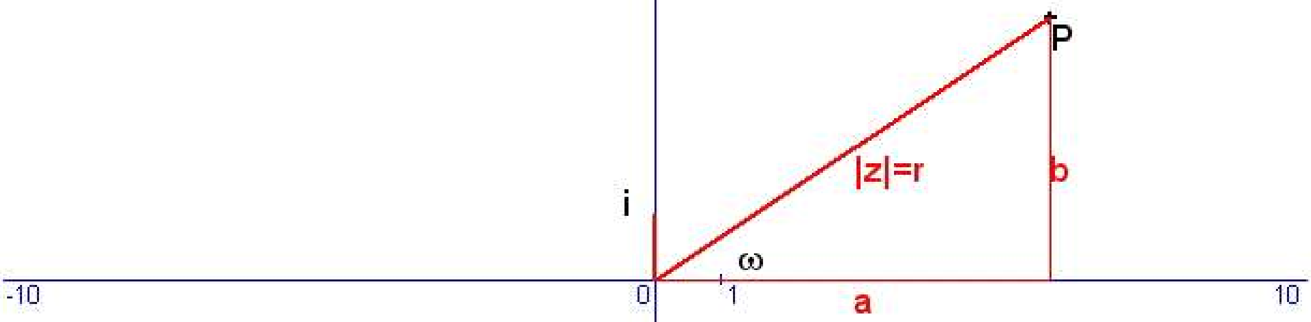
Komplexe Zahlen, Theorie

Die komplexen Zahlen erweitern die Menge der reellen Zahlen derart, dass auch Wurzeln negativer Zahlen berechnet werden können. Das gelingt durch Einführung einer neuen Zahl i als Lösung der Gleichung $x^2 = -1$. Diese Zahl i wird die imaginäre Einheit genannt mit i = sqrt(-1).



Komplexe Zahlen z werden in der Form $z = a + b*i$ geschrieben, wobei a und b reelle Zahlen sind. Während die Menge R der reellen Zahlen durch Punkte auf der Zahlengerade dargestellt wird, kann man die Menge der komplexen Zahlen C als Punkte in der Ebene darstellen (Gaußsche Zahlenebene). Dabei wird dem reellen Zahlenpaar (a,b) der Punkt P(a/b) zugeordnet. Die x-Achse ist die reelle und die y-Achse die imaginäre Achse. Dem entsprechend heißt a der Realteil und b der Imaginärteil. Man schreibt a = Re(z) und b = Im(z).

Eine komplexe Zahl $z = a + b*i$ kann in der Zahlenebene auch mit Hilfe von Polarkoordinaten $P(r ; w°)$ dargestellt werden. Dabei ist $r = |z|$ der Betrag von z und der Winkel w wird das Argument von z genannt.



Für Umrechnungen von kartesischen in Polar-Koordinaten gilt:
$r^2 = a^2 + b^2$ und $w = \arctan(b/a)$.
Für Umrechnungen von Polar- in kartesische Koordinaten gilt:
$a = r * \cos(w)$ und $b = r * \sin(w)$.
Durch Einsetzen der Koordinaten in $z = a + b*i$ erhält man:
$z = r*(\cos(w) + i*\sin(w))$.
Diese Darstellung heißt trigonometrische Form der komplexen Zahl z. Schließlich muss noch erwähnt werden, dass man die Zahlen $z = a + b*i$ und $z' = a - b*i$ konjugiert komplex nennt.

Definition der Grundrechenoperationen
für zwei komplexe Zahlen z1 = a + b*i, z2 = c + d*i.

Summe: z1 + z2 = (a+c) + (b+d)*i
Produkt: z1 * z2 = (a*c - b*d) + (a*d + b*c)*i

Die beiden Operationen sind so definiert, dass erstens alle bekannten Rechenregeln gelten und zweitens das Rechnen mit rellen Zahlen als Spezialfall für b = d = 0 daraus folgt.

Differenz: z1 - z2 = (a-c) + (b-d)*i
Quotient: z1 / z2 = (a+b*i) / (c+d*i) = ?

Um den Quotienten zu berechnen, wird zuerst der Bruch mit der konjugiert komplexen Zahl z2' = (c - d*i) erweitert und dann Realteil und Imaginärteil getrennt berechnet. Dabei erhält man:

Quotient: z1 / z2 = (a*c + b*d) / (c^2 + d^2) + (b*c - a*d) / (c^2 + d^2)*i.

Durch Ausrechnen kann man zeigen, dass für diese Rechenoperationen alle bekannten Rechenregeln gelten, und dass die reellen Zahlen R (z = a + 0*i) eine Teilmenge der Menge C sind. Eine Ordnungsrelation (<) wie in R gibt es in der Menge C nicht.

Während Additionen und Subtraktionen ohne Aufwand mit kartesischen Koordinaten durchführbar sind, so ist die Berechnung von Produkten oder Quotienten eher mühsam. Multiplikation und Division werden vorteilhaft in Form von Polarkoordinaten ausgeführt. Zur Erinnerung: $i^2 = -1$.

z1 = a + b*i = (r1 ; w1) = r1*(cos(w1) + i*sin(w1))
z2 = c + d*i = (r2 ; w2) = r2*(cos(w2) + i*sin(w2))

z = z1 * z2 = (a*c - b*d) + (a*d + b*c)*i = (r ; w)

z = r1*r2*cos(w1)*cos(w2) - r1*r2*sin(w1)*sin(w2) +
+ (r1*r2*cos(w1)*sin(w2) + r1*r2*sin(w1)*cos(w2))*i

z = r1*r2*(cos(w1)*cos(w2) + sin(w1)*sin(w2)) +
+ r1*r2*(cos(w1)*sin(w2) + sin(w1)*cos(w2))*i

z = r1*r2*(cos(w1+w2) + sin(w1+w2))*i = (r1*r2 ; w1+w2).

Diese Zusammenfassung gilt wegen der Additionsgesetze für Winkelfunktionen. Somit gilt für das komplexe Produkt:

z = z1 * z2 = (r1 ; w1) * (r2 ; w2) = (r1*r2 ; w1+w2)

Damit wurde folgender Lehrsatz hergeleitet:

Bei der Multiplikation zweier komplexer Zahlen werden
die Beträge multipliziert und die Argumente addiert.
z1 * z2 = (r1 ; w1) * (r2 ; w2) = (r1*r2 ; w1+w2).

Für die Division von z1 = (r1 ; w1) durch z2 = (r2 ; w2)
wird durch Einsetzen der trigonometrischen Formen in den
Quotienten in analoger Weise folgender Lehrsatz bewiesen:

Bei der Division zweier komplexer Zahlen werden
die Beträge dividiert und die Argumente subtrahiert,
d.h. z1 / z2 = (r1;w1) / (r2;w2) = (r1/r2 ; w1-w2).

Beispiel: z1 = 4 + 3*i und z2 = 2 + 5*i.

r1 = sqrt(4^2+3^2) = 5.00, w1 = arctan(3/4) = 36.87°
r2 = sqrt(2^2+5^2) = 5.39, w2 = arctan(5/2) = 68.20°
z1 = (5.00 ; 36.87°), z2 = (5.39 ; 68.20°)

z1 * z2 = (26.95 ; 105.07°) = -7.01 + 26.02*i
z1 / z2 = (0.93 ; -31.33°) = 0.79 - 0.48*i

Mit Hilfe dieser beiden Lehrsätze können nun auch das Potenzieren und das Radizieren mit komplexen Zahlen ausgeführt werden.

z = a + b*i = (r ; w) = r*(cos(w) + i*sin(w)).

p2 = z^2 = (r^2 ; 2*w)
p3 = z^3 = (r^3 ; 3*w)
....
Für die n-te Potenz gilt: pn = z^n = (r^n ; n*w).

w2 = z^(1/2) = (r^(1/2) ; (w/2))
w3 = z^(1/3) = (r^(1/3) ; (w/3))
....
Für die n-te Wurzel gilt: wn = z^(1/n) = (r^(1/n) ; w/n).

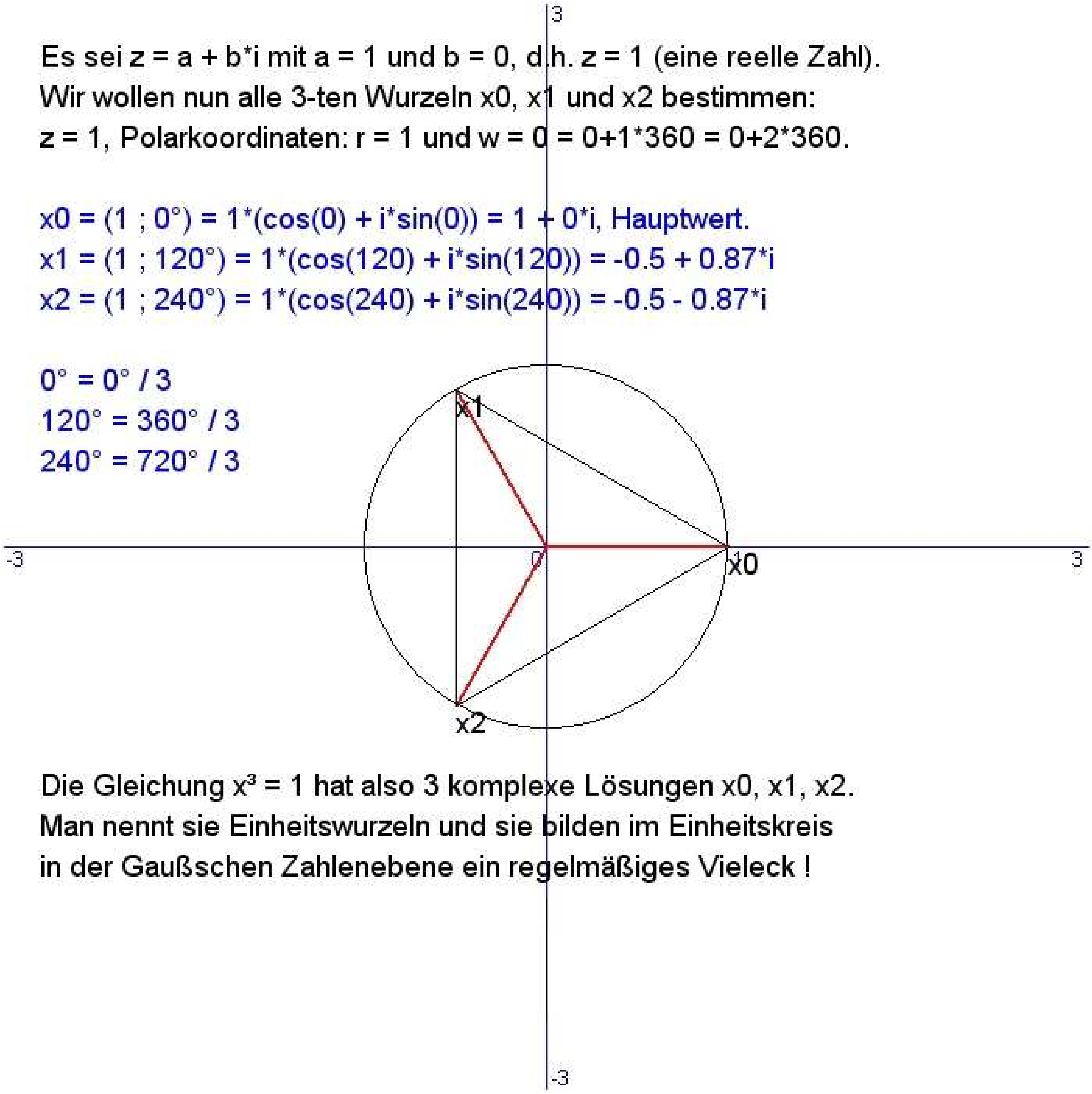
Bei der n-ten Wurzel muss folgender Sachverhalt beachtet werden. Weil die Winkel w, w + 1*360, w + 2*360, w + 3*360, ... gleich groß sind, erhält man bei einer Winkelteilung durch n genau n verschiedene Teilwinkel. Winkel w/n heißt Hauptwert, w/n + 1*360/n, w/n + 2*360/n, ..., w/n + (n-1)*360/n Nebenwerte.

Bei der n-ten Wurzel einer komplexen Zahl erhält man n Werte!

Es sei z = a + b*i mit a = 1 und b = 0, d.h. z = 1 (eine reelle Zahl).
Wir wollen nun alle 3-ten Wurzeln x0, x1 und x2 bestimmen:
z = 1, Polarkoordinaten: r = 1 und w = 0 = 0+1*360 = 0+2*360.

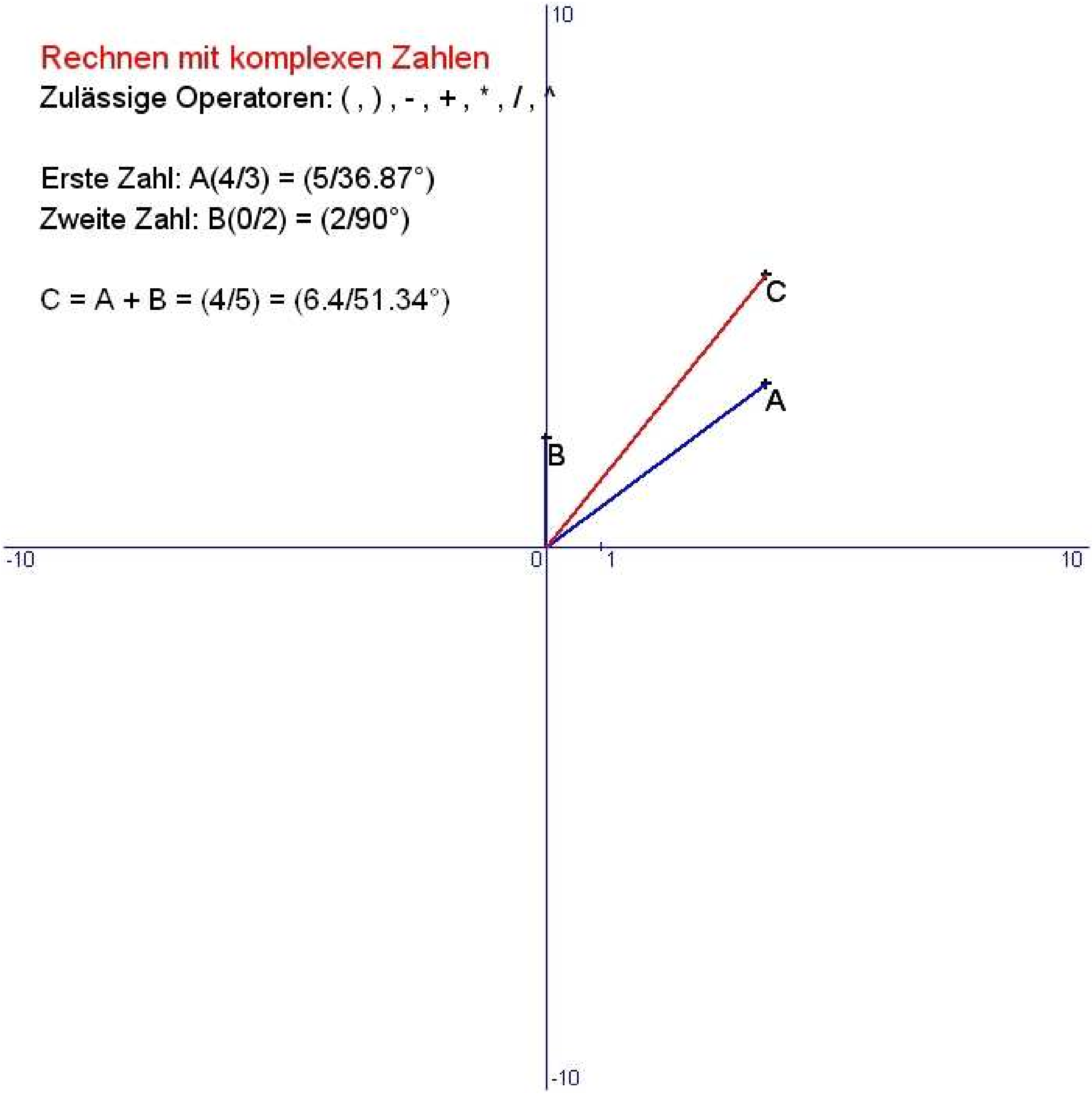
x0 = (1 ; 0°) = 1*(cos(0) + i*sin(0)) = 1 + 0*i, Hauptwert.
x1 = (1 ; 120°) = 1*(cos(120) + i*sin(120)) = -0.5 + 0.87*i
x2 = (1 ; 240°) = 1*(cos(240) + i*sin(240)) = -0.5 - 0.87*i

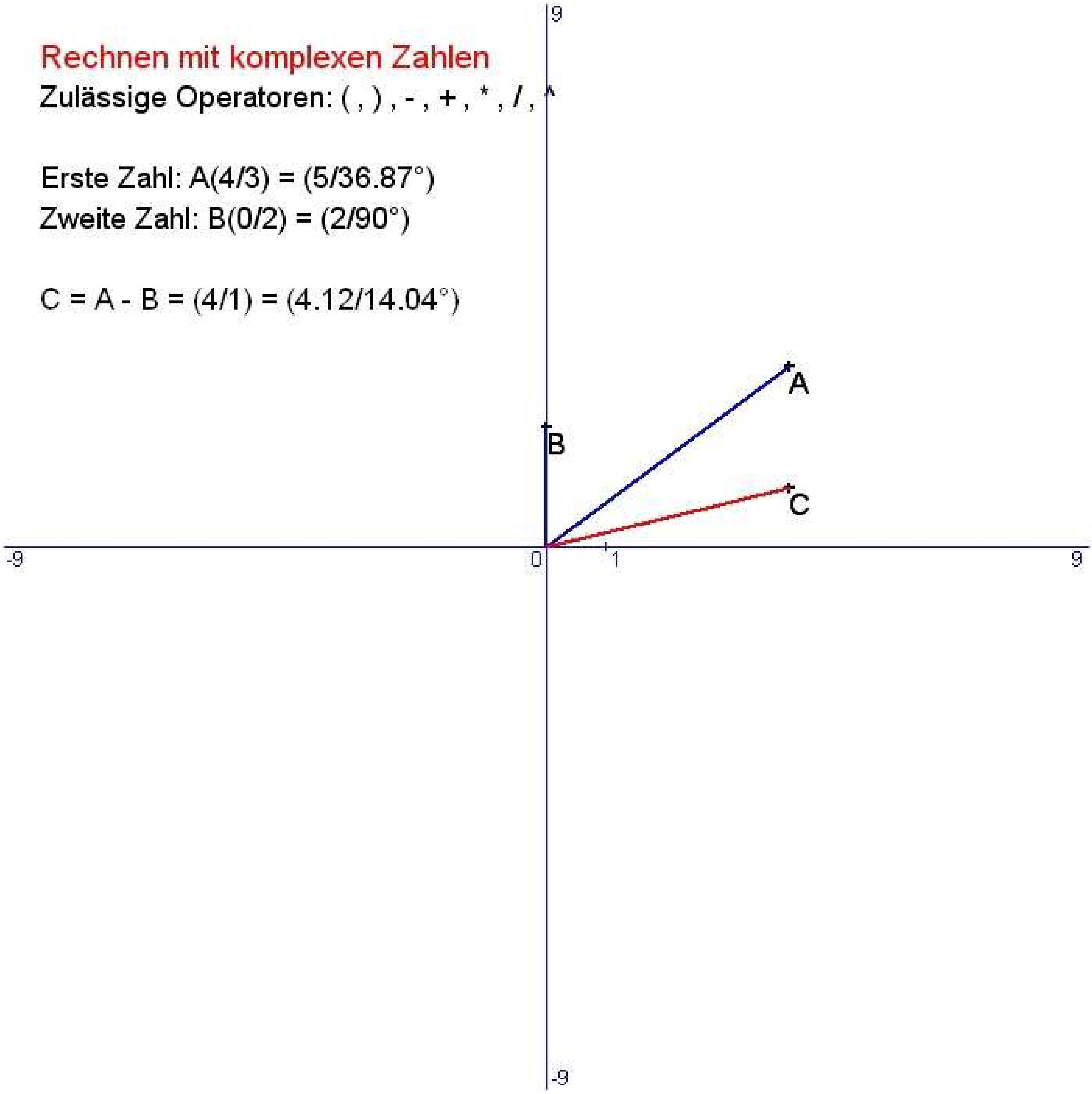
0° = 0° / 3
120° = 360° / 3
240° = 720° / 3

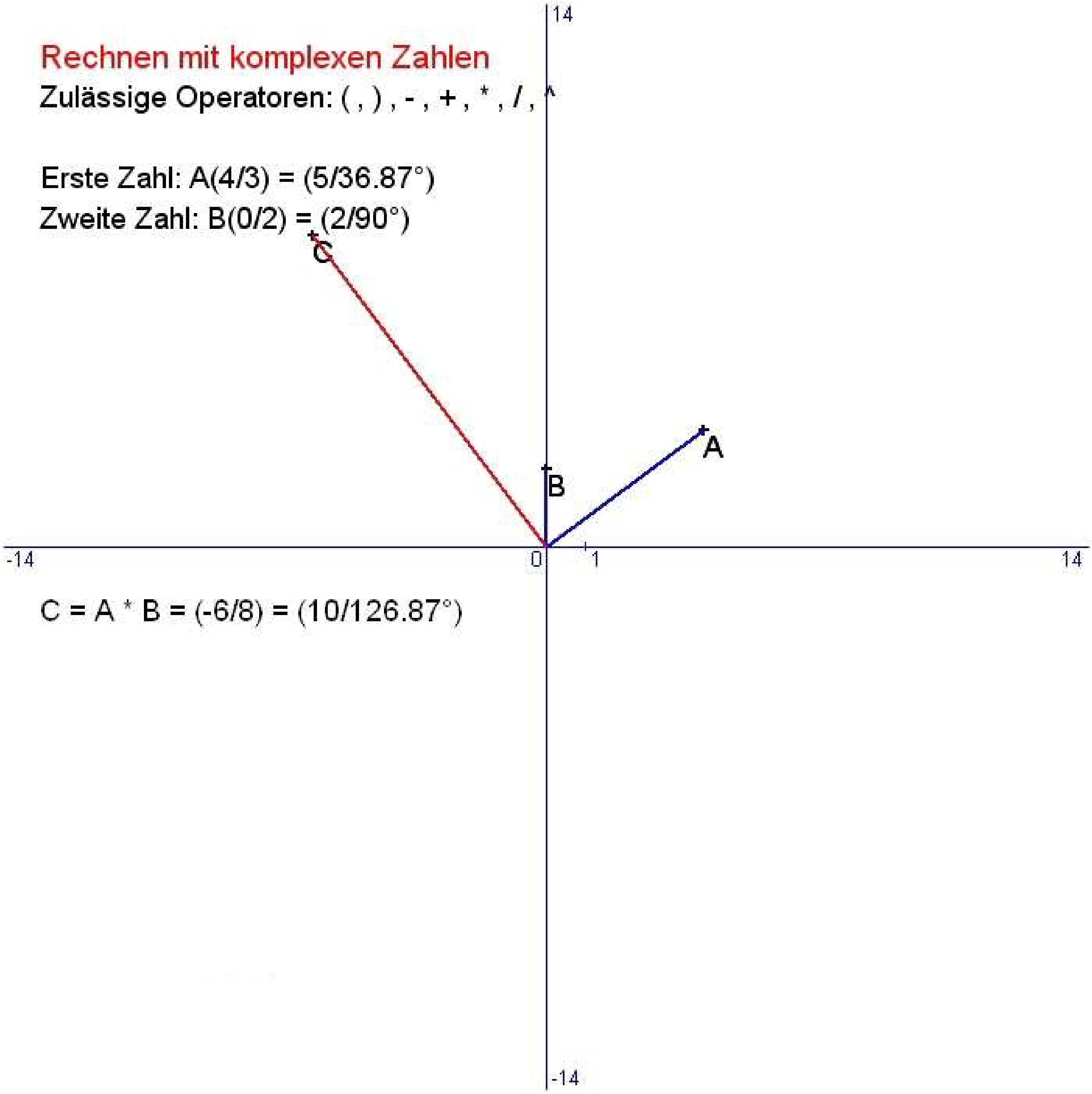


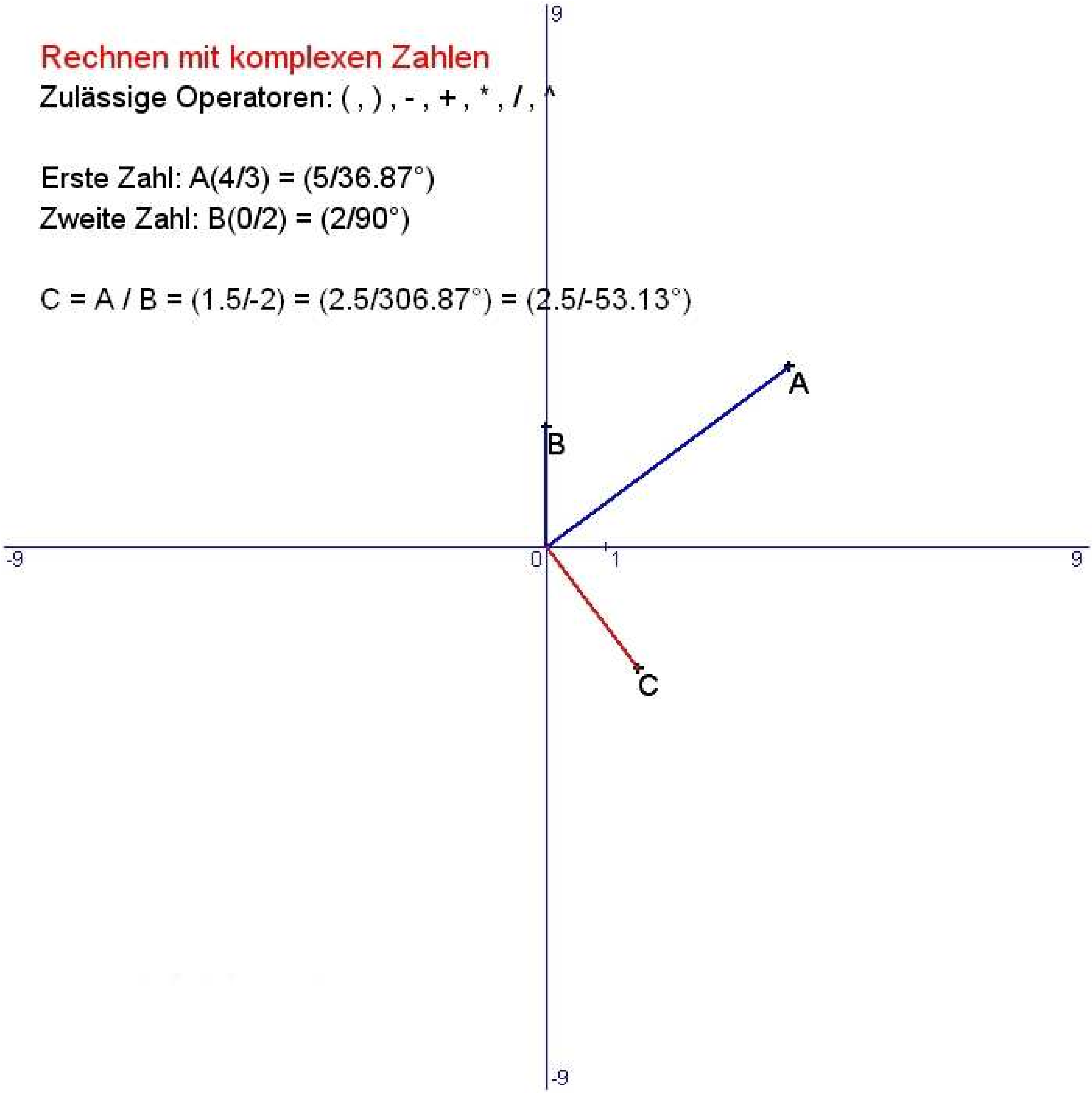
Die Gleichung $x^3 = 1$ hat also 3 komplexe Lösungen x0, x1, x2.
Man nennt sie Einheitswurzeln und sie bilden im Einheitskreis
in der Gaußschen Zahlenebene ein regelmäßiges Vieleck !

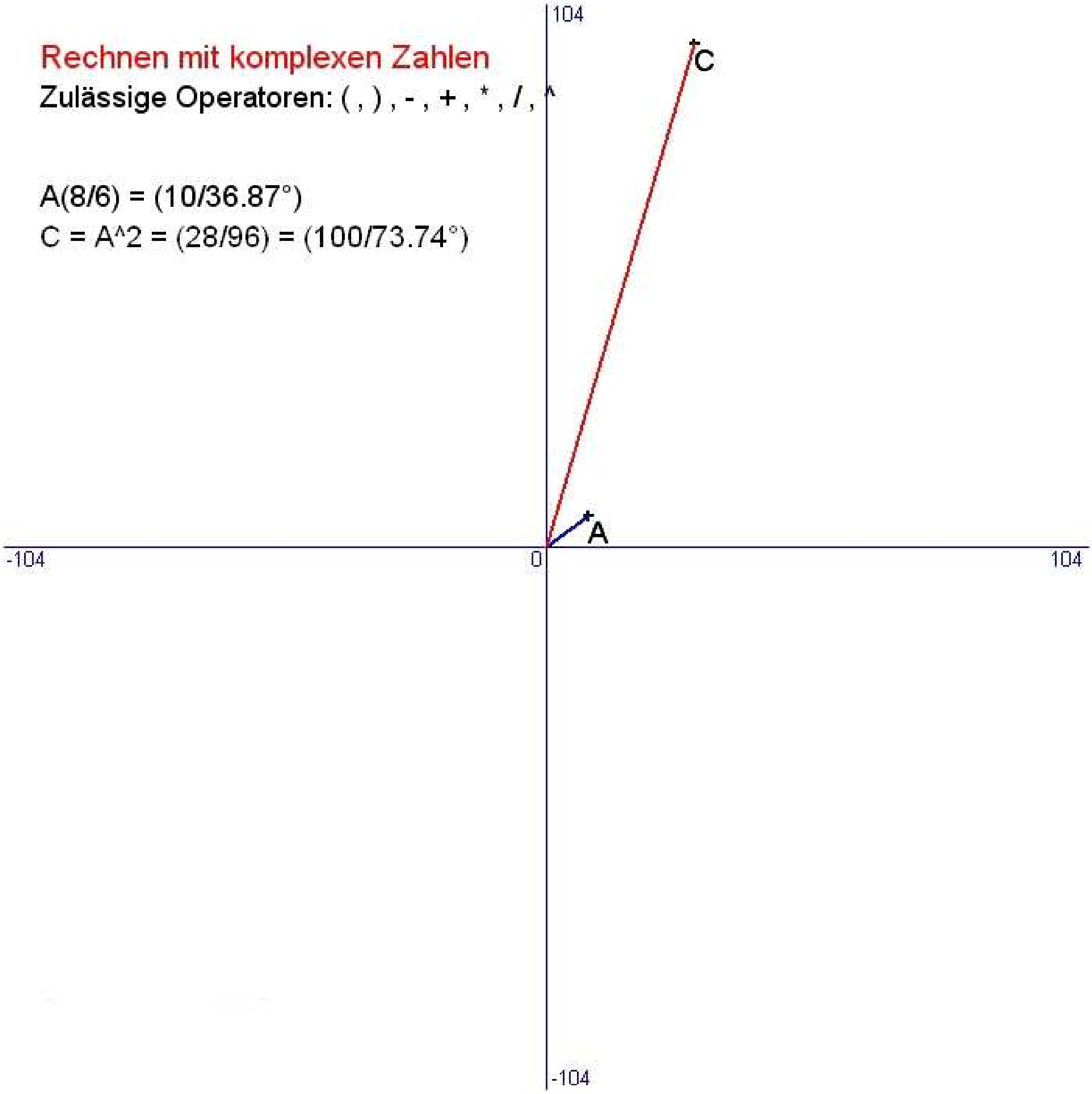
Komplexe Zahlen, Beispiele

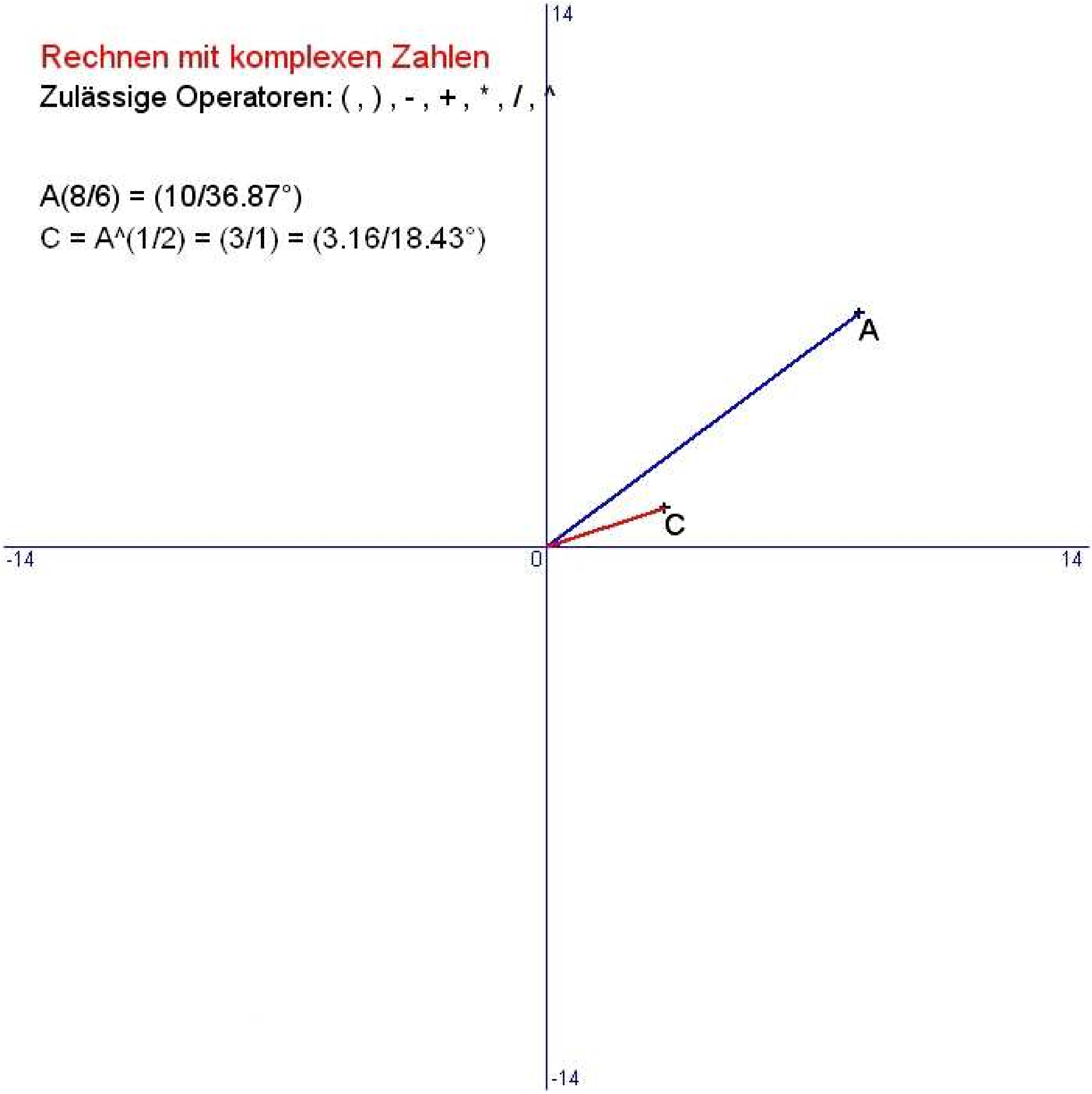



Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
Erste Zahl: A(4/3) = (5/36.87°)
Zweite Zahl: B(0/2) = (2/90°)
C = A - B = (4/1) = (4.12/14.04°)
A
B
C
9
-9
0
1
9
-9


14
Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
Erste Zahl: A(4/3) = (5/36.87°)
Zweite Zahl: B(0/2) = (2/90°)
C
A
B
-14
0
1
14
C = A * B = (-6/8) = (10/126.87°)
-14


Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
Erste Zahl: A(4/3) = (5/36.87°)
Zweite Zahl: B(0/2) = (2/90°)
C = A / B = (1.5/-2) = (2.5/306.87°) = (2.5/-53.13°)
9
-9
0
1
9
-9
A
B
C


Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
A(8/6) = (10/36.87°)
C = A^2 = (28/96) = (100/73.74°)
104
-104
0
104
-104
C
A


Rechnen mit komplexen Zahlen
Zulässige Operatoren: (,) , - , + , * , / , ^
A(8/6) = (10/36.87°)
C = A^(1/2) = (3/1) = (3.16/18.43°)
A
C
14
-14
0
14
-14